Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2023

2do Parcial (14/06/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nombre y Apellido: [redacted]

Libreta Universitaria: [redacted]

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 7

Ej. 1 26	Ej. 2 17	Ej. 3 28	Ej. 4 24	Nota 95
☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.		**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.		

Ejercicio 1 (27 puntos). Sean A, B, C matrices tales que $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Considere la siguiente matriz expresada en bloques y demuestre que:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

a) (6 puntos) Si v es autovector de A con autovalor λ, entonces existe un $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es un autovector de M con autovalor λ.

b) (12 puntos) Si w es autovector de C con autovalor λ y λ no es autovalor de A, entonces existe un único $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es un autovector de M con autovalor λ.

c) (9 puntos) Si $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ es autovector de M con autovalor λ, entonces o bien w es autovector de C con autovalor λ, o bien v es autovector de A con autovalor λ.
(Sugerencia: Separar en los casos donde $w \neq 0$ y $w = 0$).
Concluya que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de M *si y solo si* lo es de A ó C.

Ejercicio 2 (21 puntos). Sea $A \in^{m\times n}$ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\text{mín}(m,n)}$ sus valores singulares. Demostrar que:

a) (7 puntos) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

b) (7 puntos) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$.

c) (7 puntos) $\text{máx}_i |a_{ii}| \leqslant \sigma_1$.

Recordamos las definiciones de las normas utilizadas:

- $\|A\|_2 = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{mín}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ la norma 2 matricial inducida por la vectorial;
- $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^tA)}$ la norma Frobenius de la matriz A.

Ejercicio 3 (28 puntos). Sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices, donde A y D son inversibles, y x_1, x_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^n$. Considere la matriz M y el sistema de ecuaciones siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \qquad M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Se proponen dos esquemas iterativos interdependientes para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= A^{-1}Bx_2^{(k)} + A^{-1}b_1 \\ x_2^{(k+1)} &= D^{-1}Cx_1^{(k)} + D^{-1}b_2 \end{cases} \tag{1}$$

a) (6 puntos) Reescribir (1) a un esquema $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} A^{-1}b_1 \\ D^{-1}b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$.

b) (6 puntos) Pruebe que si (1) converge, entonces lo hacen a una solución del sistema.

c) (12 puntos) Demuestre que (1) converge a pesar de que $\rho(A^{-1}B)$, $\rho(D^{-1}C) \geqslant 1$ en el siguiente caso:

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) (4 puntos) ¿Es posible plantear Jacobi o Gauss-Seidel para la matriz M del enunciado si se la define con los bloques del item anterior?

Ejercicio 4 (24 puntos). La llama olímpica únicamente puede ser encendida por medio de rayos solares, y para eso se utiliza un paraboloide circular que concentra la luz solar. Se requiere hacer un modelo 3D del mismo para tenerlo digitalizado e imprimirlo en caso de necesidad, por lo que se tomaron medidas de una sección triangular de uno roto, y otros puntos se extrapolaron intuitivamente. Como esta porción iba del borde al centro, se apoyó el borde sobre unos ejes de coordenadas (es decir, boca abajo en términos del paraboloide) y midieron la altura en pies (ft). Los datos quedaron así:

x	0	2	0	1.7	1
y	0	0	2	0.9	1
f	0.76	0	0	0.1	0.6

Como estas mediciones son aproximadas, al querer obtener los parámetros α y β de la función del paraboloide $f(x, y) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta$ aparecieron inconsistencias.

a) (12 puntos) Plantear el sistema clásico y luego sus ecuaciones normales. ¿Cuántas soluciones hay?

b) (4 puntos) Demuestre que la solución al problema en el sentido de CM es $\alpha = -0.2$ y $\beta = 0.84$.

c) (4 puntos) Calcular el error cometido en el sentido de cuadrados mínimos.

d) (2 puntos) Se sabe que, si bien los primeros tres puntos se midieron con mucha precisión por ser cercanos a los bordes o deducciones geométricas de éstos, en los demás se cometieron errores inevitables que esperan ser corregidos. ¿Pudo el método efectivamente hacer la corrección esperada?

e) (2 puntos) Considerando las expectativas, ¿recomendaría usar el resultado obtenido?